1 Grothendieck topology

では層の定義において空間 X、あるいは $O(X)$ を圏 C に取り替えてみる。取り換えるだけなら $C^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Set}$ を考えるだけなので簡単である。

Definition 1.1. C を圏としたとき、関手 $C^{op} \longrightarrow \mathbf{Set}$ を C 上の前層と呼ぶ。$\mathrm{Psh}(C) = \mathrm{Funct}(C^{op}, \mathbf{Set})$ を C 上の前層からなる圏とする。

ただし、層の条件には、C の開被覆のような概念が必要であり、それを張り合わせて再構成できるという条件が求められるべきである。簡単に言えば C の位相とは何か？ということである。空間の位相は部分集合の族である。よって、Grothendieck のアイデアは部分対象なるものを考えるのと、C を広げて考えるというものだった。$\mathrm{Psh}(C)$ は C に比べると巨大な圏である。しばしば、ある圏での議論が難しい局面で、こうして関手圏に拡大して考えるという場面が見受けられる。これらの根幹にあるのは、米田氏による次の関手の考察である。

Definition 1.2. $h : C \longrightarrow \mathrm{Psh}(C)$ を、$h(X) = C(-, X)$ により定義する。

Lemma 1.3. 任意の $F \in \mathrm{Psh}(C)$, $X \in C_0$ に対し、全単射 $\mathrm{Psh}(C)(h(X), F) \cong F(X)$ が存在する。

Proof. $t \in \mathrm{Psh}(C)(h(X), F)$ を取ると、これは自然変換 $t : h(X) \Longrightarrow F$ を意味している。このとき、$t_X : h(X)(X) = C(X, X) \longrightarrow F(X)$ なので、$t_X(1_X) \in F(X)$ である。よって、$t \mapsto t_X(1_X)$ により、$\mathrm{Psh}(h(X), F) \longrightarrow F(X)$ の対応が得られる。逆に、$x \in F(X)$ に対し、$t_Y : h(X)(Y) = C(Y, X) \longrightarrow F(Y)$ は、$t_Y(f) = F(f)(x)$ により定義できる。$x \mapsto t$ は、上記の写像の逆写像 $F(X) \longrightarrow \mathrm{Psh}(C)(h(X), F)$ を与える。 □

Definition 1.4. h は埋め込み（fully faithfull であり、$h(X) \cong h(Y)$ ならば、$X \cong Y$）である。これを米田の埋め込みと呼ぶ。

Proof. h が fully fauthful、つまり、$C(X, Y) \cong \mathrm{Psh}(h(X), h(Y))$ であるのは、米田の補題から導かれる。次に、$t : h(X) \cong h(Y)$ とする。$t_X : C(X, X) \cong C(X, Y)$ なので、$f = t_X(1_X) : X \longrightarrow Y$ を得る。逆に、$t_Y : C(Y, X) \cong C(Y, Y)$ より、$g = t_Y^{-1}(1_Y) : Y \longrightarrow X$ を得る。f, g が互いに逆写像なのは、t が自然同型であることにより従う。 □

Example 1.5. P を poset とし、（小）圏とみなす。$h : P^{op} \longrightarrow \mathrm{Psh}(P)$ を考えると、

$$h(x)(y) = P(y, x) = \begin{cases} * \ (y \leqq x) \\ \phi \ (y \nleqq x) \end{cases}$$

となる。つまり、実質的には $h(x)$ の値域は $\mathbf{Set}$ ではなく、$\{\phi, *\}$ という 2 点からなる圏に値を取る。このとき、$\{\phi, *\}$ の圏構造は、$\phi \leqq *$ と考えた poset としての構造である。よって、P, $\{\phi, *\}$ はともに poset なので、

$$h : P \longrightarrow \mathrm{Funct}(P^{op}, \{\phi, *\}) = \mathbf{Pos}(P^{op}, \{\phi, *\})$$

と考えられる。$h(x) : P^{op} \longrightarrow \{\phi, *\}$ の逆像、$h(x)^{-1}(*) = \{y \in P \mid y \leqq x\}$ を考えると、これら $\{h(x)^{-1}(*) \mid x \in P\}$ を基底として P に位相が考えられる。これを P の T_0 位相という。

では部分対象を考えよう。部分対象は、集合でいえば部分集合にあたるものである。部分集合は単射を与えていることに他ならないので、圏の言葉では monomorphism を用いて定義される。

Definition 1.6. C を圏とし、$X \in C_0$ に対し、X 上の射の圏を $C \downarrow X$ とかく。

$$\mathrm{Sub}_C(X) = \{f \in (C \downarrow X)_0 \mid \text{monomorphism}\} / \cong$$

ただし、射 $f : A \longrightarrow X$ が monomorphism とは、任意の g, h に対し、$f \circ g = f \circ h$ ならば、$g = h$ を満たす射である。$[f], [g] \in \mathrm{Sub}_C(X)$ に対し、$[f] \leqq [g]$ を次で定義する。$f : A \longrightarrow X$, $g : B \longrightarrow X$ を代表元としたとき、$h : A \longrightarrow B$ で $h \circ g = f$ を満たす射が存在することと定義する。

Lemma 1.7. $(\mathrm{Sub}_C(X), \leqq)$ は *poset* である。

Proof. 推移律は明らかである。反射律は、同型類ということで満たしている。反対称律であるが、これは monomorphism でることを用いると、$[f] \leqq [g]$, $[g] \leqq [f]$ から、$[g] = [f]$ であることがわかる。 $\square$

Example 1.8. **Set** において、f : monomorphism であることと、単射であることは同値である。よって、

$$\mathrm{Sub}_{\mathbf{Set}}(X) = P(X) = \mathbf{Set}(X, \{0, 1\})$$

である。

Definition 1.9. C は pull-back を持つ圏とする。$\mathrm{Sub}_C : C^{op} \longrightarrow \mathbf{Set}$ が、$X \in C_0$ に対し、$\mathrm{Sub}(X)$ で与えられる。$f : X \longrightarrow Y$ に対し、

$$\mathrm{Sub}_C(f) = f^* : \mathrm{Sub}_C(Y) \longrightarrow \mathrm{Sub}_C(X)$$

が、$[g] \in \mathrm{Sub}_C(Y)$ に対し、$g : A \longrightarrow Y$ としたとき、その pull-back により誘導される $f^* : X \times_Y A \longrightarrow X$ で与える。実際には、$\mathrm{Sub}_C : C^{op} \longrightarrow \mathbf{Pos}$ と poset の圏に値を持つ関手である。

Definition 1.10. $F : C^{op} \longrightarrow \mathbf{Set}$ が表現可能とは、$BF \in C_0$ が存在し、$F \cong C(-, BF)$ を満たすことである。つまり、F が米田埋め込みの像に入ることである。BF を表現対象と呼ぶ。Sub_C が表現可能である時、表現対象 $\Omega = B\mathrm{Sub}_C$ を subobject classifier と呼ぶ。

Example 1.11. $\mathrm{Sub}_{\mathbf{Set}}$ は表現可能であり、$\Omega = \{0, 1\}$ である。

さて、圏 C の対象 X の部分集合族を $\mathrm{Sub}_C(X)$ と考え、ここから部分集合を選んで位相と考えるというアイデアがある。しかし、Grothendieck 位相は、$X \in C_0$ を $h(X) \in \mathrm{Psh}(C)$ へ埋め込んでから、$h(X)$ の部分対象を考えたものである。それを言い換えたのが sieve と呼ばれる概念である。

Definition 1.12. C を圏とし、$X \in C_0$ を対象とする。$S \subset (C \downarrow X)_0$ が sieve とは、$f \in S$ ならば、任意の g に対し、$f \circ g \in S$ を満たす射の族である。X 上の sieve 全体の集合を $\mathrm{Sie}_C(X)$ とおく。

Lemma 1.13. $\mathrm{Sub}_{\mathrm{Psh}(C)}(h(X)) \cong \mathrm{Sie}_C(X)$ である。

Proof. $\alpha : \mathrm{Sub}_{\mathrm{Psh}(C)}(h(X)) \longrightarrow \mathrm{Sie}_C(X)$ を次で定義する。$[t] \in \mathrm{Sub}_{\mathrm{Psh}(C)}(h(X))$ を取ると、$t : F \longrightarrow h(X)$ である。

$$\alpha[t] = \{s_Y(y) : Y \longrightarrow X \mid [t] = [s], Y \in C_0, y \in F(Y)\}$$

逆に、$\beta : \mathrm{Sie}_C(X) \longrightarrow \mathrm{Sub}_{\mathrm{Psh}(C)}(h(X))$ を次で与える。$S \in \mathrm{Sie}_C(X)$ に対し、$F_S : C^{op} \longrightarrow \mathbf{Set}$ を、$F_S(Y) = C(Y, X) \cap \mathrm{Sie}_C(X)$ により定義する。また、$t(S) : F_S \Longrightarrow h(X)$ を、$t(S)_Y : F_S(Y) = C(Y, X) \cap \mathrm{Sie}_C(X) \longrightarrow h(X)(Y) = C(Y, X)$ を包含写像により定義する。$\beta(S) = [t(S)]$ により定義する。α, β が互いに逆写像になっていることは容易に確かめられる。 $\square$

Example 1.14. X 上のすべての射、つまり、$(C \downarrow X)_0$ は X 上の sieve である。

Example 1.15. $A \subset (C \downarrow X)_0$ に対し、

$$[A] = \{u \circ v \mid u : Y \longrightarrow X \in A, v : Z \longrightarrow Y\}$$

を A で生成された sieve と呼ぶ。

Example 1.16. 任意の射 $f : X \longrightarrow Y$ で、S を Y 上の sieve とすると、

$$f_*^{-1}(S) = \{g \in C \downarrow X \mid g \circ f \in S\}$$

は X 上の sieve である。これを S の f による pull-back と呼ぶ。

Definition 1.17. C を圏、J が C 上の Grothendieck 位相とは、任意の $X \in C_0$ に対し、sieve の族 $J(X)$ が与えられ、次の条件を満たす。$S \in J(X)$ を X 上の covering sieve と呼ぶ。

1. (Identity) $(C \downarrow X)_0$ は X 上の covering sieve である。
2. (Base change) 任意の射 $f : X \longrightarrow Y$ と、$S \in J(Y)$ に対し、$f_*^{-1}(S) \in J(X)$ である。
3. (Local character) $S \in J(X)$, R を X 上の sieve とする。任意の $f : Y \longrightarrow X \in S$ に対し、$f_*^{-1}(R) \in J(Y)$ ならば、$R \in J(X)$ である。

圏と Grothendieck 位相の組 (C, J) を景 (site) と呼ぶ。

Example 1.18. X を位相空間としたとき、$U \in O(X)_0$ に対し、U 上の sieve は U の部分開集合の族である。

$$J(U) = \left\{ S \in O(U) \mid U = \bigcup_{V \in S} V \right\}$$

これは通常の意味での U の covering に他ならない。

もう少しわかりやすい概念としては、Grothendieck 前位相がある。こちらの方が covering としては理解しやすいと思う。

Definition 1.19. C を pull-back を持つ圏とする。C 上の covering K とは、任意の $X \in C_0$ に対し、射の族の族 $K(X) \in P(P(C \downarrow X)_0)$ が与えられ、次を満たす。$T \in K(X)$ を X 上の covering family と呼ぶ。

1. (Isomorhism) $f : Y \longrightarrow X$ が同型ならば、$\{f\} \in K(X)$ である。
2. (Base change) 任意の $\{X_\alpha \longrightarrow X\} \in K(X)$ と射 $f : Y \longrightarrow X$ に対し、
$$f^*(\{X_\alpha \longrightarrow X\}) = \{X_\alpha \times_X Y \longrightarrow Y\} \in K(Y)$$
である。
3. (Local character) $\{X_\alpha \longrightarrow X\} \in K(X)$ に対し、任意の $\{X_{\beta\alpha} \longrightarrow X_\alpha\} \in K(X_\alpha)$ を考えたとき、合成 $\{X_{\beta\alpha} \longrightarrow X\} \in K(X)$ である。

K を Grothendieck 前位相と呼ぶ。

さて、J と K, covering sieve と covering family はとてもよく似ているので、その性質を比較していく。これらの関係は $O(X)$ で考えれば、空間の位相と、被覆に対応する。位相があれば被覆が考えられるが、被覆からも位相を生成できる。
まず、covering sieve から誘導される covering family を定義する。

Lemma 1.20. (C, J) を景とする。

$$K_J(X) = \{T \subset (C \downarrow X)_0 \mid [T] \in J(X)\}$$

によって定義すると、K_J は *covering family* である。

Proof. それぞれの条件を確かめていこう。

1. まず isomorphism 条件だが、$f : Y \longrightarrow X$ を同型とすると、f から生成される sieve を考えると、
$$[\{f\}] = \{g \circ f \mid g : Z \longrightarrow Y\} = (f^{-1})^*(C \downarrow Y)_0 \in J(X)$$
であるため、covering sieve の identity と base change の条件から、$\{f\} \in K_J(X)$ である。

2. 次の base change であるが、$T \in K_J(X)$, $f : Y \longrightarrow X$ を考える。定義から、

$$[T] = \{h \circ g \mid g \in T, h \in C_1\} \in J(X)$$

であるが、covering sieve の base change により、

$$f_*^{-1}[T] = \{\alpha \in C \downarrow Y \mid f \circ \alpha \in [T]\} \in J(Y)$$

である。$T = \{X_\alpha \longrightarrow X\}$ とおくと、

$$f^*T = \{p_\alpha : Y \times_X X_\alpha \longrightarrow Y\}$$

であり、

$$[f^*T] = \{p_\alpha \circ h \mid p_\alpha \in f^*T, h \in C_1\}$$

であるが、pull-back の一意性から、$f_*^{-1}(T) = [f^*T]$ が示される。よって、$f^*T \in K_J(Y)$ である。

3. 最後に local character であるが、$S = \{X_\alpha \longrightarrow X\} \in K_J(X)$ と、任意の $S_\alpha = \{X_{\beta\alpha} \longrightarrow X_\alpha\} \in K_J(X_\alpha)$ を考え、合成 $T = \{X_{\beta\alpha} \longrightarrow X\}$ を考える。任意の $f : X_\alpha \longrightarrow X \in S$ を考えると、

$$f_*^{-1}[T] = \{g \in (C \downarrow X_\alpha)_0 \mid f \circ g \in [T]\} = [S_\alpha] \in J(X_\alpha)$$

であるため、covering sieve の local character の条件により、$[T] \in J(X)$ である。

□

Lemma 1.21. K を *covering family* とする。

$$J_K(X) = \{S \mid S \supset {}^\exists R \in K(X)\}$$

で定義すると、これは *Grothendieck* 位相となる。これを K から生成される *Grothendieck* 位相と呼ぶ。

Proof. やはり、それぞれの条件を確かめる。

1. まず、$(C \downarrow X)_0 \supset \{1_X\} \in K(X)$ なので、$(C \downarrow X)_0 \in J_K(X)$ である。

2. 次に任意の射 $f : X \longrightarrow Y$ と、$S \in J_K(Y)$ に対し、$S \supset {}^\exists R \in K(Y)$ である。$f_*^{-1}(S) \supset f^*(R) \in K(X)$ なので、$f_*^{-1}(S) \in J_K(X)$ となる。

3. $S \in J_K(X)$, $R \in \mathrm{Sie}_C(X)$ とする。任意の $f : Y \longrightarrow X \in S$ に対し、$f_*^{-1}(R) \in J_K(Y)$ とする。よって、$S \supset {}^\exists T \in K(X)$、そして $f_*^{-1}(R) \supset {}^\exists T_f \in K(Y)$ がとれる。Covering family の local character の条件により、$T' = \coprod_f T_f \circ T \in K(X)$ である。$T_f \subset f_*^{-1}(R)$ であることから、$T' \subset R$ であることが導かれ、$R \in J_K(X)$ である。

□